المحاضرة [redacted]
التاسعة

مثال 9 ص 15

اوجد القيم الخاصة والدوال الخاصة للمعادلة

$$g(x) = \lambda \int_0^1 K(x,T)\, g(t)\, dt \quad (1)$$

علماً أن

$$K(x,T) = \begin{cases} \frac{2-T}{2}\, x & x \le T,\ 0 \le x < 1 \\ \frac{2-x}{2}\, T & x \ge T,\ 0 \le T < 1 \end{cases} \quad (2)$$

(3) $$g(x) = \lambda \int_0^x \frac{2-x}{2}\, T\, g(t)\, dt + \lambda \int_x^1 \frac{2-T}{2}\, x\, g(t)\, dt$$

$$g'(x) = -\frac{\lambda}{2} \int_0^x T\, g(t)\, dt + \lambda \frac{2-x}{2}\, x\, g(x) + \lambda \int_x^1 \frac{2-T}{2}\, g(t)\, dT - \lambda \frac{2-x}{2}\, x\, g(x)$$

(4) $$g'(x) = -\frac{\lambda}{2} \int_0^x T\, g(t)\, dT + \lambda \int_x^1 \frac{2-T}{2}\, g(t)\, dt$$

$$g''(x) = -\frac{\lambda}{2}\, x\, g(x) - \lambda \frac{2-x}{2}\, g(x)$$

$$g''(x) = -\frac{\lambda}{2}\, x\, g(x) + \frac{\lambda}{2}\, x\, g(x) - \lambda\, g(x)$$

$$g''(x) = -\lambda\, g(x) \quad (5)$$

$$g''(x) + \lambda\, g(x) = 0$$

وهي معادلة من الرتبة الثانية ذات ثوابت

لانه المعادلة المميزة لها

$$\rho^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \rho^2 = -\lambda$$

$$\rho^2 = \lambda i^2 \Rightarrow \rho = \pm\sqrt{\lambda}\, i$$

(5) يكون حل المعادلة بالشكل

$$g(x) = A\cos\sqrt{\lambda}\, x + B\sin\sqrt{\lambda}\, x$$

A, B ثابتان اختياريان

ايجاد الشروط الحدية

$$\left.\begin{aligned} g(0) &= 0 \\ g(1) &= \frac{\lambda}{2}\int_0^1 T\, g(t)\, dT \\ g'(1) &= -\frac{\lambda}{2}\int_0^1 T\, g(t)\, dT \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

نعوض $g(0)$ ، $g(1)$ في (5)

$$g(0) = A \Rightarrow \boxed{A = 0}$$

$$g(1) = B\sin\sqrt{\lambda}\, x$$

$$B\sin\sqrt{\lambda}\, x = \frac{\lambda}{2}\int_0^1 T\, g(t)\, dT \quad (7)$$

باشتقاق (5) بالنسبة لـ x

وبتعويض $A = 0$ ، $x = 1$

$$g'(x) = B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\, x$$

$$g'(1) = B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}$$

نعوض في (6)

$$B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} = -\frac{\lambda}{2}\int_0^1 T\, g(t)\, dT \quad (8)$$

نقسم (7) و (8) على بعضهما

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\, \frac{\sin\sqrt{\lambda}\, x}{\cos\sqrt{\lambda}\, x} = -1$$

$$\tan\sqrt{\lambda}\, x = -\sqrt{\lambda} \quad (9)$$

ان القيم الخاصة $\lambda_n\ (n = 1, 2, \dots)$ هي جذور المعادلة (9)

لما الدوال الذاتية تبدل في (A) والأصغر

$B = 1$

$g_n(x) = \sin\sqrt{\lambda_n}\, x$

سؤال 10 ص 153 اوجد حل المعادلة

(1) $g(x) = ax + b + \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x\sin y + \cos x)\, g(y)\, dy$

مستخدما النواة الحالة $R(x,y,\lambda)$

$g(x) = f(x) + \lambda \int_{-\pi}^{\pi} R(x,y,\lambda)\, f(t)\, dt$

$g(x) = ax + b + \lambda \int_{-\pi}^{\pi} R(x,y,\lambda)(ay + b)\, dt$ (2)

$R(x,y,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(x,T)$ (3)

$= K_1(x,T) + \lambda K_2(x,T) + \lambda^2 K_3(x,T) + \dots + \lambda^n K_{n+1}(x,T)$

$K(x,y) = x\sin y + \cos x$

$K_1(x,y) = K(x,y) = x\sin y + \cos x$

$K_2(x,y) = \int_{-\pi}^{\pi} K_1(x,y_1)\, K(y_1,y)\, dy_1$

$= \int_{-\pi}^{\pi} (x\sin y_1 + \cos x)(y_1 \sin y + \cos y_1)\, dy_1$

$= x\sin y \int y_1\, dy_1 + x \int \underline{\sin y_1 \cos y_1}\, dy_1 + \cos x \sin y \underline{\int y_1\, dy_1} + \cos x \underline{\int \cos y_1\, dy_1}$

$0 =$ فردية

$= x\sin y \int_{-\pi}^{\pi} y_1 \sin y_1\, dy_1$

$= 2\pi(x\sin y)$

$K_3(x,y) = \int_{-\pi}^{\pi} K_2(x,y_1)\, K_1(y_1,y)\, dy_1$

$= 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} x\sin y_1 (y_1 \sin y + \cos y_1)\, dy_1$

$= 2\pi x \left[\sin y \int_{-\pi}^{\pi} y_1 \sin y_1\, dy_1 + \int_{-\pi}^{\pi} \sin y_1 \cos y_1\, dy_1 \right]$

$= 2\pi x \sin y \int_{-\pi}^{\pi} y_1 \sin y_1\, dy_1$

$= (2\pi)^2 (x\sin y)$

$K_n(x,y) = \int_{-\pi}^{\pi} K_{n-1}(x,y_1)\, K(y_1,y)\, dy_1$

$= (2\pi)^{n-1} (x\sin y)$

نعوض في (3)

$R(x,y,\lambda) = x\sin y + \cos x + (\lambda 2\pi) x\sin y + (2\lambda\pi)^2 x\sin y + \dots + (2\lambda\pi)^n x\sin y + \dots$

$R(x,y,\lambda) = \cos x + x\sin y \left[1 + \lambda 2\pi + (2\lambda\pi)^2 + \dots + (2\lambda\pi)^n + \dots \right]$

$|2\lambda\pi| < 1$

$R(x,y,\lambda) = \cos x + \dfrac{x\sin y}{1 - 2\lambda\pi}$

$$g(x) = ax + b + \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos x + \frac{x \sin y}{1 - 2\lambda\pi}\right)(ay + b)\,dy$$

$$= ax + b + \frac{\lambda}{1 - 2\lambda\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} b(1 - 2\lambda\pi)\cos x\,dy + x \int_{-\pi}^{\pi} (ay + b)\sin y\,dy \right\}$$

$$= ax + b + \frac{\lambda}{1 - 2\lambda\pi} \Big[2\pi b(1 - 2\lambda\pi)\cos x + x\left(-(ay + b)\cos y \Big|_{-\pi}^{\pi} + a\int_{-\pi}^{\pi} \cos y\,dy\right)$$

$$= ax + b + \frac{\lambda}{1 - 2\lambda\pi} \Big[(1 - 2\lambda\pi) 2\pi b \cos x - x\left(-(a\pi + b) + (-a\pi + b)\right) \Big]$$

$$= ax + b + \frac{\lambda}{1 - 2\lambda\pi} \Big[(1 - 2\lambda\pi) 2\pi b \cos x - x(-2a\pi) \Big]$$

$$= \frac{ax}{1 - 2\lambda\pi} + 2\lambda\pi b \cos x + b$$

المسائل 11 و 12 و 13

متروكة